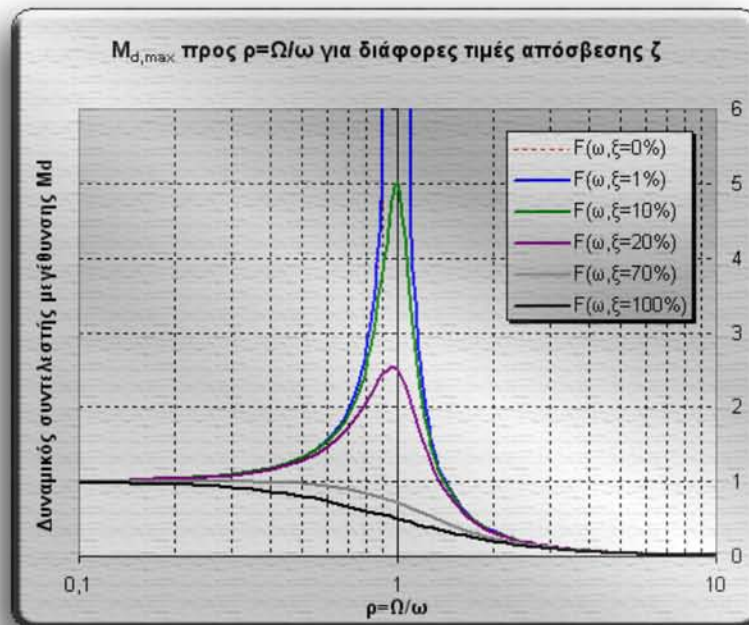


ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ»

# Α.Σ.Τ.Ε. Ι

Υπεύθυνη: Θ. Τίκα

*Ασκήσεις Συμπεριφοράς Εδάφους σε Δυναμική  
και Ανακυκλιζόμενη Φόρτιση*



Όνοματεπώνυμο: Οικονόμου Θεμιστοκλής

Δευτέρα, 27 Ιανουαρίου 2003

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ :  
 Αντισεισμικός Σχεδιασμός Τεχνικών Έργων

*Τεχνική Σεισμολογία & Εδαφοδυναμική*

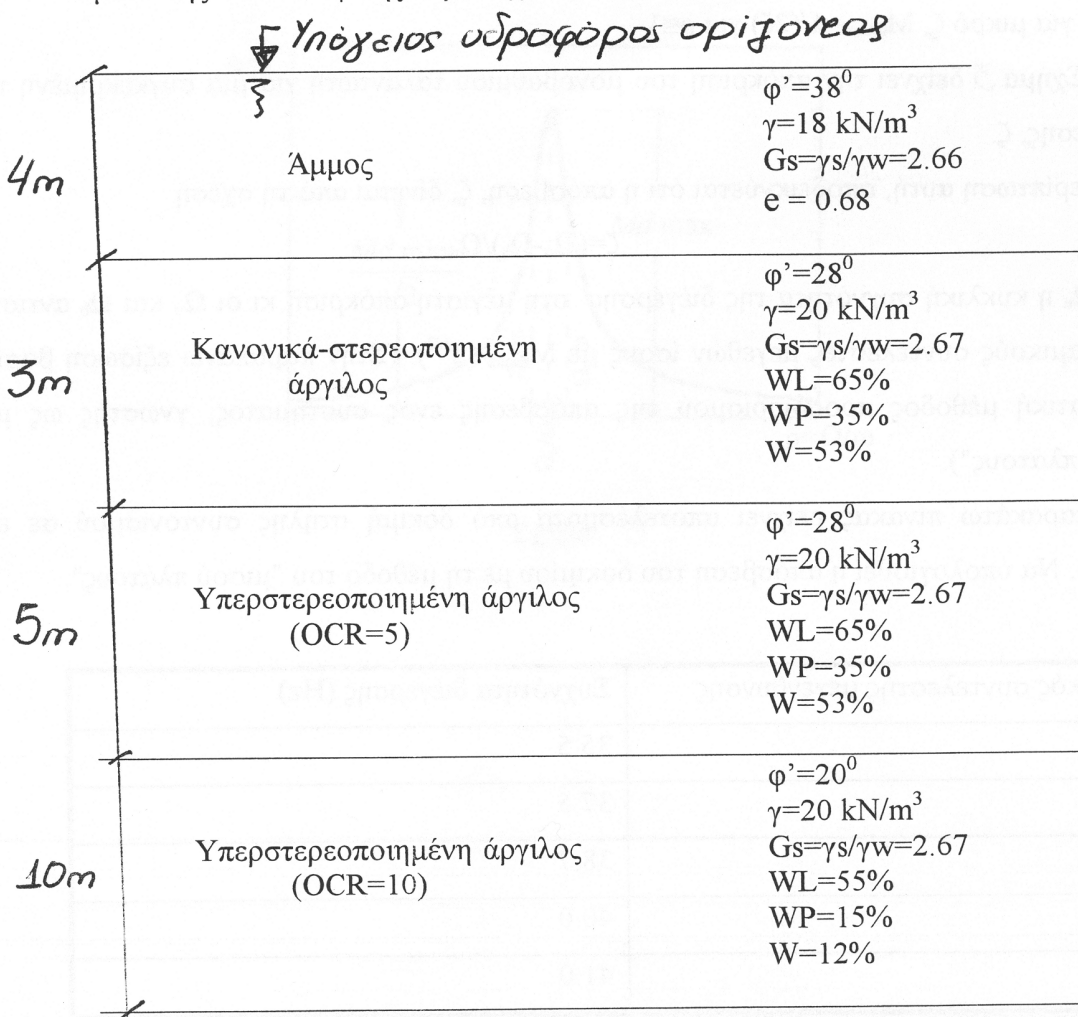
**ΘΕΜΑ**

Συμπεριφορά εδάφους σε δυναμική & ανακυκλιζόμενη φόρτιση

Άσκηση 1

Για την εδαφική τομή του Σχήματος 1 να προσδιοριστούν με βάση τις προτεινόμενες στη διεθνή βιβλιογραφία σχέσεις:

- A. η μεταβολή του μέγιστου μέτρου διάτμησης,  $G_{max}$  με το βάθος,
- B. η μεταβολή του κανονικοποιημένου μέτρου διάτμησης,  $G/G_{max}$ , κι' απόσβεσης,  $D$ , με τη διατμητική παραμόρφωση για κάθε εδαφική στρώση και
- Γ. η μεταβολή του μέτρου διάτμησης,  $G$ , με τη διατμητική παραμόρφωση στο μέσο της κάθε εδαφικής στρώσης



Σχήμα 1

## Άσκηση 2

Για το μονοβάθμιο ταλαντωτή του Σχήματος 2, ο οποίος υποβάλλεται σε εξαναγκασμένη αρμονική διέγερση

α) να αποδειχθεί ότι ο δυναμικός συντελεστής μεγένθυσης,  $M_d$ , ο οποίος ορίζεται ως λόγος της μέγιστης δυναμικής μετακίνησης,  $u_{max}$ , ως προς τη στατική μετακίνηση,  $u_{st}=P_0/k$ , δίνεται από τη σχέση:

$$M_d = 1 / [(1 - \rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2]^{1/2}$$

όπου  $\rho = \Omega/\omega$  είναι ο λόγος της κυκλικής συχνότητας της διέγερσης προς την κυκλική συχνότητα του συστήματος

β) να σχεδιαστεί η τιμή του  $M_{dmax}$  ως προς το λόγο  $\rho = \Omega/\omega$  για διάφορες τιμές της απόσβεσης ( $\zeta = 0.01, 0.1, 0.2, 0.7$  και  $1$ )

γ) να αποδειχθεί ότι η μέγιστη τιμή του δυναμικού συντελεστή μεγένθυσης δίδεται από τη σχέση

$$M_{dmax} = 1 / [2\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2}] \text{ για } \rho = (1 - 2\zeta^2)^{1/2}$$

και ότι για μικρό  $\zeta$ ,  $M_{dmax} = 1/(2\zeta)$  για  $\rho \approx 1$

δ) Το Σχήμα 3 δείχνει την απόκριση του μονοβάθμιου ταλαντωτή για μια συγκεκριμένη τιμή της απόσβεσης,  $\zeta$ .

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι η απόσβεση,  $\zeta$ , δίνεται από τη σχέση

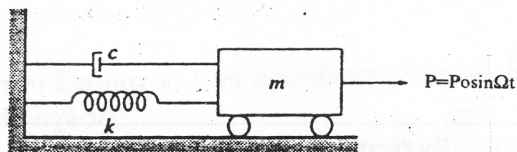
$$\zeta = (\Omega_a - \Omega_b) / \Omega_n$$

όπου  $\Omega_n$  η κυκλική συχνότητα της διέγερσης στη μέγιστη απόκριση κι οι  $\Omega_a$  και  $\Omega_b$  αντιστοιχούν σε δυναμικούς συντελεστές μεγεθών ίσους με  $M_{dmax}/(2^{1/2})$ . (Στην παραπάνω εξίσωση βασίζεται η πειραματική μέθοδος προσδιορισμού της απόσβεσης ενός συστήματος, γνωστής ως μέθοδος "μισού πλάτους").

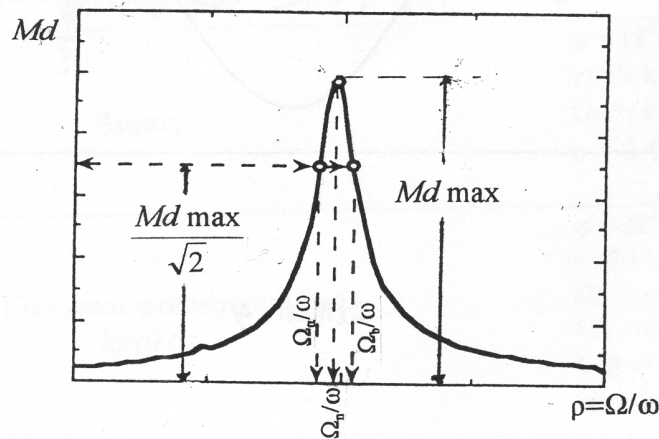
ε) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει αποτελέσματα από δοκιμή στήλης συντονισμού σε εδαφικό δοκίμιο. Να υπολογισθεί η απόσβεση του δοκιμίου με τη μέθοδο του "μισού πλάτους".

Δυναμικός συντελεστής μεγένθυσης	Συχνότητα διέγερσης (Hz)
1.00	35.5
1.14	37.5
1.43	38.7
2.00	40.0
2.17	41.0

1.88	43.7
1.00	47.5



Σχήμα 2



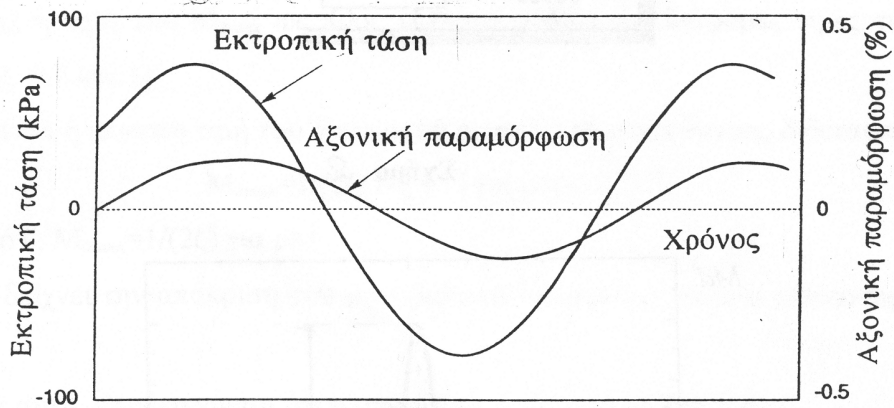
Σχήμα 3

### Άσκηση 3

Το Σχήμα 4 δείχνει τη μεταβολή της εκτροπικής τάσης και αξονικής παραμόρφωσης από κυκλική τριαξονική δοκιμή με ελεγχόμενη τάση.

α) Να υπολογισθεί το τέμνον μέτρο διάτμησης,  $G$ , και ο λόγος απόσβεσης,  $D$ , του δοκιμίου.

β) Θεωρώντας ότι η συμπεριφορά του εδάφους περιγράφεται από τα κριτήρια Masing, να εκτιμηθεί το μέγιστο μέτρο διάτμησης του εδάφους.



Σχήμα 4

**[1] Άσκηση 1<sup>η</sup>:**

Για την εδαφική τομή του Σχήματος 1, να προσδιοριστούν με βάση τις προτεινόμενες στη διεθνή βιβλιογραφία σχέσεις:

- A) η μεταβολή του μέγιστου μέτρου διάτμησης  $G_{\max}$  με το βάθος.  
 B) η μεταβολή του κανονικοποιημένου μέτρου διάτμησης  $G/G_{\max}$  κι απόσβεσης,  $D$ , με τη διατμητική παραμόρφωση για κάθε εδαφική στρώση και  
 Γ) η μεταβολή του μέτρου διάτμησης,  $G$ , με τη διατμητική παραμόρφωση στο μέσο της κάθε εδαφικής στρώσης.

**1.1) Μεταβολή του μέτρου διάτμησης  $G_{\max}$  με το βάθος.**

Για τον υπολογισμό του  $G_{\max}$  θα χρειαστεί να κάνουμε τα εξής βήματα για κάθε στρώση:

- Υπολογισμός του δείκτη πόρων του εδάφους. Όπου δεν δίνεται, λαμβάνεται ίσος με

$$e = \frac{V_v}{V_s} = w \cdot G_s \quad (\text{για υγρασία } w\% \text{ και } G = \frac{\gamma_s}{\gamma_w})$$

- Υπολογισμός του δείκτη πλαστιμότητας για τις αργλικές στρώσεις. Ισούνται με  $PI = WL - WP$ .
- Υπολογισμός των κατακορύφων τάσεων  $\sigma_{v,i} = \sigma_{v,i-1} + \Delta z \cdot \gamma$
- Υπολογισμός της υδροστατικής πίεσης  $u = (z - z_{y,0}) \cdot 10$
- Υπολογισμός των ενεργών κατακορύφων τάσεων  $\sigma'_v = \sigma_v - u$
- Υπολογισμός του συντελεστή ωθήσεων σε ηρεμία  $k_0 = (1 - \sin \phi) \cdot OCR^{1/2}$  (για λόγους προγραμματισμού, κάθε στρώση που δεν είναι υπερστερεοποιημένη, θεωρείται ότι έχει  $OCR=1$ )
- Υπολογισμός των οριζοντίων ενεργών τάσεων  $\sigma'_h = k_0 \cdot \sigma'_v$
- Υπολογισμός της μέσης ενεργούς τάσεως (mean effective stress), η οποία δίνεται από τον

$$\text{τύπο } \sigma'_o = \frac{\sigma'_v + 2 \cdot \sigma'_h}{3} = \frac{(1 + 2 \cdot k_0) \cdot \sigma'_v}{3}$$

- Υπολογισμός της συνάρτησης του δείκτη πόρων  $F(e)$ , σύμφωνα με τη βιβλιογραφία:

- Για χαλίκια,  $F(e) = \frac{2,17 - e^2}{1 + e}$

- Για αμμώδη εδάφη,  $F(e) = \frac{1}{0,30 + 0,70 \cdot e^2}$

- Για κανονικά στερεοποιημένες αργίλους,  $F(e) = e^{-1,453}$

- Για υπερστερεοποιημένες αργίλους,  $F(e) = e^{-1,184}$

- Υπολογισμός του μέγιστου μέτρου διάτμησης  $G_{\max}$  με το βάθος, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία:

- Για χαλίκια,  $G_{\max} = 1200 \cdot F(e) \cdot (\sigma'_o)^{0,850}$

- Για αμμώδη εδάφη,  $G_{\max} = 3100 \cdot F(e) \cdot (\sigma'_o)^{0,180} \cdot (p'_a)^{0,180}$ , με  $p'_a$  την ατμοσφαιρική πίεση (100kPa)

- Για κανονικά στερεοποιημένες αργίλους,  $G_{\max} = 1664 \cdot F(e) \cdot (\sigma'_o)^{0,602}$

- Για υπερστερεοποιημένες αργίλους,  $G_{\max} = 1366 \cdot F(e) \cdot (\sigma'_o)^{0,748} \cdot (OCR)^{0,239}$

Με τα ανωτέρω υπόψιν, σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα και διάγραμμα στο Excel:

Soil No	OCR	Soil	z	$\gamma$	$\phi$	$W_L$	$W_P$	W	$G_s$	e	PI	$e=G_s \cdot w$
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	sand	0	18	38	-	-	-	2,66	0,68	-	0,68
	2											
	4											
2	1	NC-Clay	4	20	28	65%	35%	53%	2,67	-	30%	1,4151
	5,5											
	7											
3	5	OC-Clay	7	20	28	65%	35%	53%	2,67	-	30%	1,4151
	9,5											
	12											
4	10	OC-Clay	12	20	20	55%	15%	12%	2,67	-	40%	0,3204
	17											
	22											

Στάθμη υπογείου οριζοντία (m)= 0

Soil No	OCR	Soil	z	$\sigma_v$	u	$\sigma'_v$	$k_o$	$\sigma'_h$	$\sigma'_o$	F(e)	G(max)
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	sand	0	0	0	0	0,3843	0,0000	0,0000	1,6034	0,0000
	2		36	20	16	6,1494		9,4329	17,0544		
	4		72	40	32	12,2988		18,8659	19,3207		
2	1	NC-Clay	4	72	40	32	0,5305	16,9769	21,9846	0,6038	6,4568
	5,5		102	55	47	24,9348		32,2899	8,1380		
	7		132	70	62	32,8928		42,5952	9,6147		
3	5	OC-Clay	7	132	70	62	1,1863	73,5505	89,7003	0,6629	31,8209
	9,5		182	95	87	103,2079		97,8053	40,9981		
	12		232	120	112	132,8653		125,9102	49,5243		
4	10	OC-Clay	12	232	120	112	2,0807	233,0401	192,6934	3,8482	466,4350
	17		332	170	162	337,0758		278,7172	614,7426		
	22		432	220	212	441,1116		364,7411	751,7532		

Στάθμη υπογείου οριζοντία (m)= 0



1.2) Ερώτημα 2<sup>ο</sup>.

Από τη βιβλιογραφία παίρνουμε τους εξής πίνακες που περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ διατμητικής παραμόρφωσης  $\gamma$  με το μέτρο διάτμησης  $G/G_{max}$  και την απόσβεση  $D$ :

Χαλίκια							
§3.13 Kokusho and Tanaka 1994	$\gamma$	Intact G=288MPa G/G <sub>max</sub>	Intact G=288MPa D(%)	Intact G=458MPa G/G <sub>max</sub>	Intact G=458MPa D(%)	Reconstituted G/G <sub>max</sub>	Reconstituted D(%)
	0,000001	1,00	0,02	1,00	0,07	1,00	0,01
0,00001	0,92	0,03	0,93	0,08	0,96	0,02	
0,0001	0,61	0,06	0,60	0,11	0,70	0,03	
0,001	0,22	0,12	0,21	0,13	0,20	0,10	
0,01	0,10	0,20	0,10	0,15	0,05	0,30	

Κανονικά στερεοποιημένα 5% < PI < 12%							
§3.10 Kalliglou et al. 1999	$\gamma$	PI = 5% G/G <sub>max</sub>	PI = 5% D(%)	PI = 5,5% G/G <sub>max</sub>	PI = 5,5% D(%)	PI = 12% G/G <sub>max</sub>	PI = 12% D(%)
	0,0001	1,00	7,50	1,00	2,20	1,00	2,70
0,001	0,97	7,60	0,95	2,30	0,97	2,80	
0,01	0,80	8,00	0,70	7,50	0,80	4,20	
0,1	0,40	10,00	0,25	12,50	0,40	9,00	
1	0,10	12,50	0,01	17,50	0,10	15,00	

Κανονικά στερεοποιημένα 18% < PI < 19%					
§3.11 Kalliglou et al. 1999	$\gamma$	PI = 18% G/G <sub>max</sub>	PI = 18% D(%)	PI = 19% G/G <sub>max</sub>	PI = 19% D(%)
	0,0001	1,00	2,20	1,00	3,80
0,001	1,00	2,30	0,97	4,00	
0,01	0,90	3,00	0,81	5,10	
0,1	0,52	8,00	0,40	11,50	
1	0,18	16,00	0,10	20,00	

Κανονικά στερεοποιημένα 33% < PI < 66%					
§3.12 Kalliglou et al. 1999	$\gamma$	PI = 33,5% G/G <sub>max</sub>	PI = 33,5% D(%)	PI = 66,2% G/G <sub>max</sub>	PI = 66,2% D(%)
	0,0001	1,00	1,00	2,50	
0,001	1,00	1,30	3,00		
0,01	0,90	2,60	3,50		
0,1	0,53	3,80	6,00		
1	0,18	10,00	11,00		

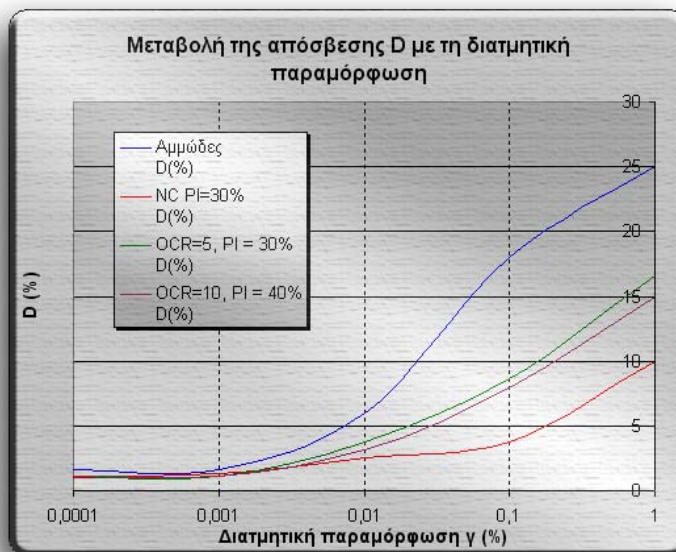
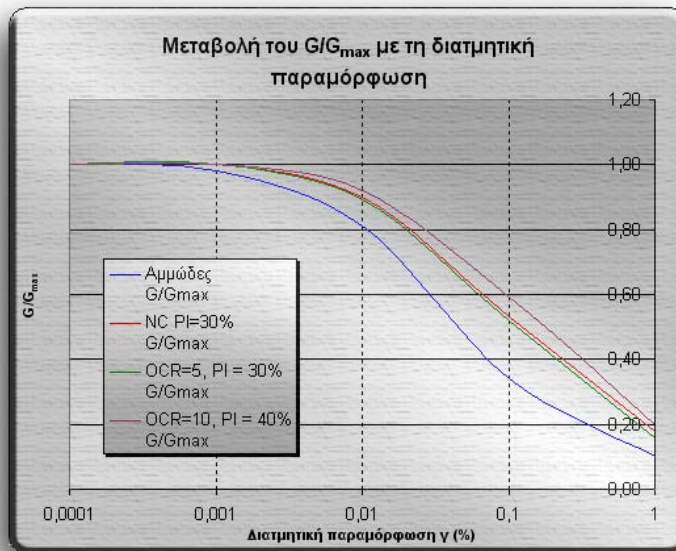
Αμμώδη εδάφη					
§3.9 Tika et al. 1999	$\gamma$	0,553 < e < 0,898 G/G <sub>max</sub>	0,553 < e < 0,898 D(%)	0,705 < e < 1,081 G/G <sub>max</sub>	0,705 < e < 1,081 D(%)
	0,0001	1,00	1,60	1,00	1,60
0,001	0,98	1,60	0,95	1,60	
0,01	0,81	6,00	0,83	5,00	
0,1	0,34	18,00	0,40	15,80	
1	0,10	25,00	0,13	22,80	

Υπερστερεοποιημένα 30% < PI < 40% (1 < OCR < 15)					
§3.20 Vucetic-Dorby 1991	$\gamma$	PI = 30% G/G <sub>max</sub>	PI = 30% D(%)	PI = 40% G/G <sub>max</sub>	PI = 40% D(%)
	0,0001	1,00	1,10	1,00	1,10
0,001	1,00	1,10	1,00	1,10	
0,01	0,89	3,80	0,92	3,20	
0,1	0,52	8,60	0,59	7,90	
1	0,16	16,60	0,20	15,00	

Οι ανωτέρω πίνακες μας δίνουν τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για να βρούμε τη μεταβολή του κανονικοποιημένου μέτρου διάτμησης  $G/G_{max}$  κι απόσβεσης,  $D$ , με τη διατμητική παραμόρφωση για κάθε εδαφική στρώση:



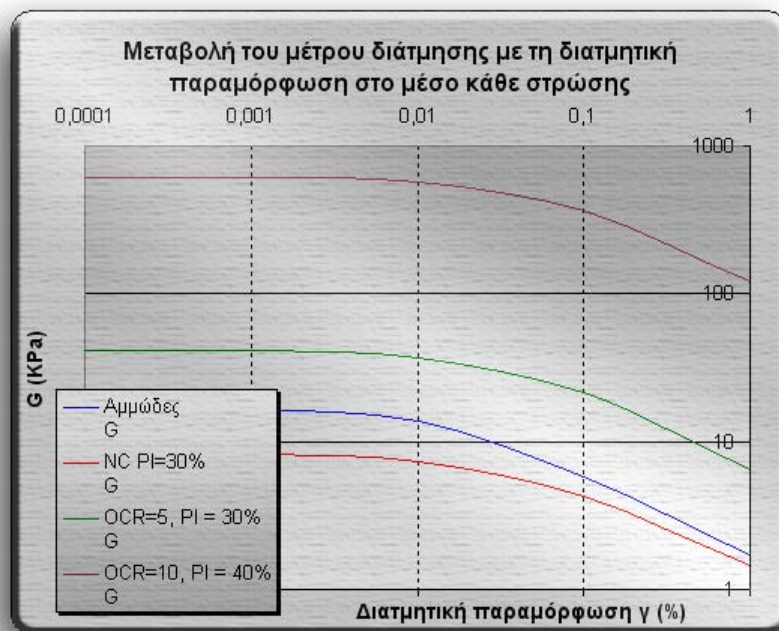
Τελικά αποτελέσματα						
Στρώση	γ	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
1η	Αμώδες G/G <sub>max</sub>	1,00	0,98	0,81	0,34	0,10
	Αμώδες D(%)	1,60	1,60	6,00	18,00	25,00
2η	NC PI=30% G/G <sub>max</sub>	1,00	1,00	0,90	0,53	0,18
	NC PI=30% D(%)	1,00	1,30	2,50	3,80	10,00
3η	OCR=5, PI = 30% G/G <sub>max</sub>	1,00	1,00	0,89	0,52	0,16
	OCR=5, PI = 30% D(%)	1,10	1,10	3,80	8,60	16,60
4η	OCR=10, PI = 40% G/G <sub>max</sub>	1,00	1,00	0,92	0,59	0,20
	OCR=10, PI = 40% D(%)	1,10	1,10	3,20	7,90	15,00



### 1.3) Ερώτημα 3<sup>ο</sup>.

Από το προηγούμενο ερώτημα, και έχοντας γνωστά τα  $G_{max}$  από το πρώτο ερώτημα, έχουμε:

Τελικά αποτελέσματα							
Στρώση	$G_{max}$	$\gamma$	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
1η	17,0544	Αμμώδες $G/G_{max}$	1,00	0,98	0,81	0,34	0,10
		Αμμώδες G	17,0544	16,7133	13,8141	5,7985	1,7054
2η	8,1380	NC PI=30% $G/G_{max}$	1,00	1,00	0,90	0,53	0,18
		NC PI=30% G	8,1380	8,1380	7,3242	4,3131	1,4648
3η	40,9981	OCR=5, PI = 30% $G/G_{max}$	1,00	1,00	0,89	0,52	0,16
		OCR=5, PI = 30% G	40,9981	40,9981	36,4883	21,3190	6,5597
4η	614,7426	OCR=10, PI = 40% $G/G_{max}$	1,00	1,00	0,92	0,59	0,20
		OCR=10, PI = 40% G	614,7426	614,7426	565,5632	362,6981	122,9485



**[2] Άσκηση 2<sup>η</sup>:**

Για το μονοβάθμιο ταλαντωτή του Σχήματος 2, ο οποίος υποβάλλεται σε εξαναγκασμένη αρμονική διέγερση:

- α) να αποδειχθεί ότι ο δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης,  $M_d$ , ο οποίος ορίζεται ως λόγος της μέγιστης δυναμικής μετακίνησης,  $u_{max}$ , ως προς τη στατική μετακίνηση,  $u_{st} = P_0/k$ , δίνεται από τη σχέση:

$$M_d = 1/[(1-\rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2]^{1/2}$$

Όπου  $\rho = \Omega/\omega$  είναι ο λόγος της κυκλικής συχνότητας της διέγερσης προς την κυκλική συχνότητα του συστήματος.

- β) να σχεδιαστεί η τιμή του  $M_{dmax}$  ως προς το λόγο  $\rho = \Omega/\omega$  για διάφορες τιμές της απόσβεσης ( $\zeta = 0.01, \zeta = 0.1, \zeta = 0.2, \zeta = 0.7, \zeta = 1.0$ ),
- γ) να αποδειχθεί ότι η μέγιστη τιμή του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης δίνεται από τη σχέση:

$$M_{dmax} = 1/[2\zeta(1-\zeta^2)^{1/2}], \text{ για } \rho = (1-2\zeta^2)^{1/2}$$

και ότι για μικρό  $\zeta$ ,  $M_{dmax} = 1/(2\zeta)$ , για  $\rho \approx 1$

- δ) Το σχήμα 3 δείχνει την απόκριση του μονοβάθμιου ταλαντωτή για μια συγκεκριμένη τιμή της απόσβεσης,  $\zeta$ . Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι η απόσβεση,  $\zeta$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta = (\Omega_a - \Omega_b) / \Omega_n$$

όπου  $\Omega_n$ , η κυκλική συχνότητα της διέγερσης στη μέγιστη απόκριση κι οι  $\Omega_a$  και  $\Omega_b$  αντιστοιχούν στους δυναμικούς συντελεστές μεγεθών ίσους με  $M_{dmax}/(2^{1/2})$ . (Στην παραπάνω εξίσωση βασίζεται η πειραματική μέθοδος προσδιορισμού της απόσβεσης ενός συστήματος, γνωστής ως μέθοδος «μισού πλάτους»).

- ε) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει αποτελέσματα από δοκιμή στήλης συντονισμού σε εδαφικό δοκίμιο. Να υπολογισθεί η απόσβεση του δοκιμίου με τη μέθοδο του «μισού πλάτους».

Δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης	Συχνότητα διέγερσης (Hz)
1,00	35,5
1,14	37,5
1,43	38,7
2,00	40,0
2,17	41,0
1,88	43,7
1,0	47,5

## 2.1) Ερώτημα α.

Η εξίσωση που περιγράφει την αρμονική εξαναγκασμένη ταλάντωση του είναι:

$$m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + k \cdot u = -P(t) \quad (\text{σχέση 2.1α})$$

Δεδομένου ότι η κίνηση του εδάφους λαμβάνεται αρμονική με κυκλική συχνότητα  $\Omega$ , μπορεί να θεωρηθεί ότι το όργανο καταγραφής της σεισμικής κίνησης υποβάλλεται στην εξωτερική διέγερση:  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_o \cdot \sin(\Omega \cdot t)$

$P_o$ : Πλάτος ταλάντωσης.

$\Omega$ : Κυκλική συχνότητα ταλάντωσης.

Άρα, η προκύπτουσα εξαναγκασμένη ταλάντωση θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$(2.1\alpha) \rightarrow m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + k \cdot u = -P_o \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (\text{σχέση 2.2α})$$

ή αλλιώς  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}''(t) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(t) = -\mathbf{P}_o \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (\text{σχέση 2.2β})$

$u''(t)$  σχετική επιτάχυνση του ταλαντωτή ως προς τη βάση

$u'(t)$  σχετική ταχύτητα του ταλαντωτή ως προς τη βάση

$u(t)$  σχετική μετακίνηση του ταλαντωτή ως προς τη βάση

Σε κάθε όρο της ανωτέρω εξίσωσης θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό LAPLACE. Με τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου *Mathematica 4.2*, έχουμε τα κάτωθι αποτελέσματα:

```
In[1]:= LaplaceTransform[m * u''[t], t, s] /. LaplaceTransform[u[t], t, s] -> F
LaplaceTransform[c * u'[t], t, s] /. LaplaceTransform[u[t], t, s] -> F
LaplaceTransform[k * u[t], t, s] /. LaplaceTransform[u[t], t, s] -> F
LaplaceTransform[-P * Sin[W * t], t, s]

Out[1]= m (F s^2 - s u[0] - u'[0])
Out[2]= c (F s - u[0])
Out[3]= F k
Out[4]= - P W / (s^2 + W^2)
```

Δηλαδή, με  $F(s)=L\{u(t)\}(s)$ , η εξίσωση 2.2β γίνεται:

$$m \cdot (F(s) \cdot s^2 - s \cdot u(0) - u'(0)) + c \cdot (F(s) \cdot s - u(0)) + F(s) \cdot k = -\frac{P_o \cdot \Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

και επειδή έχουμε συνοριακές συνθήκες  $u(0)=u'(0)=0$ , τελικά έχουμε:

$$m \cdot F(s) \cdot s^2 + c \cdot F(s) \cdot s + F(s) \cdot k = -\frac{P_o \cdot \Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad (\text{σχέση 2.2γ})$$

$$\begin{aligned}
 c &= 2 \cdot m \cdot \omega_o \cdot \xi \\
 F(s) &= -\frac{P_o \cdot \Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot (m \cdot s^2 + c \cdot s + k)} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F(s) = -\frac{P_o \cdot \Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot \left(m \cdot s^2 + 2 \cdot m \cdot \omega_o \cdot \xi \cdot s + m \cdot \frac{k}{m}\right)} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \\
 &\Rightarrow F(s) = -\frac{P_o}{m} \cdot \frac{\Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot (s^2 + 2 \cdot \omega_o \cdot \xi \cdot s + \omega^2)} \Rightarrow \omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2} \\
 &\Rightarrow F(s) = -\frac{P_o}{m} \cdot \frac{\Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot (s^2 + 2 \cdot \omega_o \cdot \xi \cdot s + \omega_o^2 \cdot \xi^2 + \omega_d^2)} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{F(s) = -\frac{P_o}{m} \cdot \frac{\Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot ((s + \omega_o \cdot \xi)^2 + \omega_d^2)}} \quad \text{(σχέση 2.2δ)}$$

Η εξωτερική φόρτιση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή, όταν υποβάλλεται σε σεισμική διέγερση είναι:  
 $P(t) = -m \cdot \ddot{u}_g$

Όμως,  $u_g = |u_g| \cdot \sin(\Omega \cdot t) \Rightarrow \dot{u}_g = \Omega |u_g| \cdot \cos(\Omega \cdot t) \Rightarrow \ddot{u}_g = -\Omega^2 \cdot |u_g| \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ , οπότε

$$P(t) = m \cdot \Omega^2 \cdot |u_g| \cdot \sin(\Omega \cdot t) = P_o \cdot \sin(\Omega \cdot t) \Rightarrow P_o = m \cdot \Omega^2 \cdot |u_g|$$

Επομένως, η σχέση 2.2δ γίνεται:

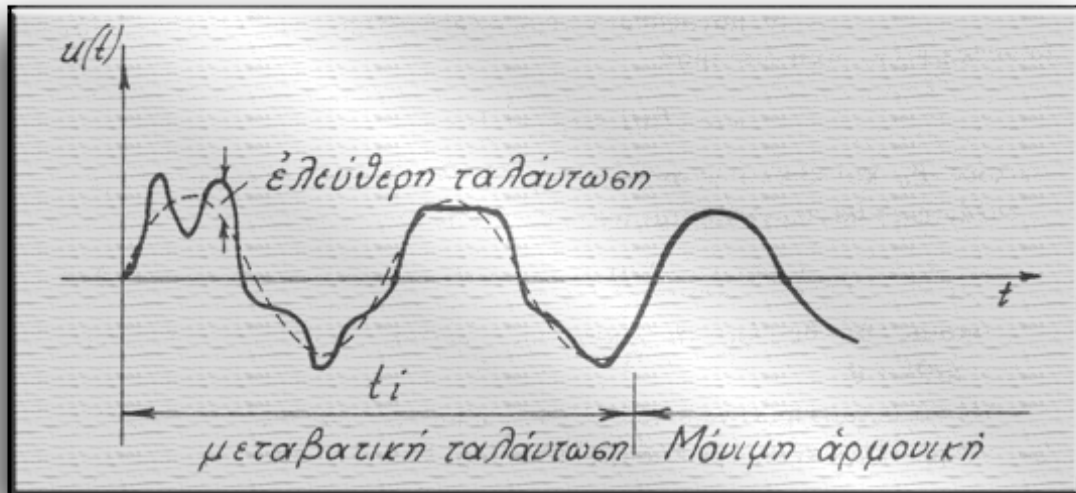
$$F(s) = -\Omega^2 \cdot |u_g| \cdot \frac{\Omega}{(s^2 + \Omega^2) \cdot ((s + \omega_o \cdot \xi)^2 + \omega_d^2)}$$

Η παραπάνω συνάρτηση, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace (και τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου *Mathematica 4.2*), μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{\Omega^3 \cdot |u_g|}{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_o^2 \cdot \Omega^2} \cdot \left[ \left( \frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{\Omega} \sin(\Omega \cdot t) - 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right) - \right. \\
 &\left. - e^{-\xi \cdot \omega_o \cdot t} \cdot \left( \frac{\omega_d^2 - \xi^2 \cdot \omega_o^2 - \Omega^2}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) - 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \cos(\omega_d \cdot t) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Το περιεχόμενο ανάμεσα στις αγκύλες αποτελείται από δύο κομμάτια (βλ. σελ. 109, *Δυναμική των Κατασκευών*).

Το πρώτο κομμάτι, με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\Omega \cdot t$ , αναφέρεται στην εξωτερική διέγερση (έδαφος). Το δεύτερο κομμάτι, με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\omega_d \cdot t$  αναφέρεται στην ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος. Επειδή το δεύτερο κομμάτι έχει το εκθετικό  $e$ , το οφειλόμενο σε ελεύθερη ταλάντωση μερίδιο της κινήσεως μειώνεται προοδευτικά και έπειτα από χρόνο  $t_i$  πρακτικά μηδενίζεται, όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα:



Στο διάστημα  $(0-t_i)$  η ταλάντωση λέγεται μεταβατική, ενώ από εκεί και πέρα παίρνει τη μόνιμη μορφή της όπως εκφράζεται από την παρακάτω εξίσωση :

$$u(t) = \frac{\Omega^3 \cdot |u_g| \cdot \left( \frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right)}{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_o^2 \cdot \Omega^2} \Rightarrow u(t) = u(t) \cdot \frac{\omega_o^4}{\omega_o^4}$$

$$u(t) = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_o^2} \cdot |u_g| \cdot \left( \frac{\Omega}{\omega_o^2} \cdot \frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - \frac{\Omega}{\omega_o^2} \cdot 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right) \beta = \frac{\Omega}{\omega_o}}{\left( \frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{\omega_o^2} \right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_o^2 \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_o^4}} \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{\beta^2 \cdot |u_g| \cdot \left[ (1 - \beta^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) - \beta \cdot 2 \cdot \xi \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]}{(1 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2}$$

Ισχύει ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός:

$$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x = \Gamma \cdot \sin(x + \phi) \text{ με: } \Gamma = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ και } \phi = \arctan \frac{B}{A}, \text{ οπότε:}$$

$$r(t) = (1 - \beta^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) - \beta \cdot 2 \cdot \xi \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$A = (1 - \beta^2) \quad , \quad B = -2 \cdot \xi \cdot \beta$$

$$\Gamma = \sqrt{A^2 + B^2} = \left[ (1 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \phi = \arctan \frac{B}{A} = \arctan \frac{-2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1 - \beta^2)}$$

$$r(t) = \left[ (1 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \left( \Omega \cdot t + \arctan \frac{-2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1 - \beta^2)} \right)$$

Έτσι, τελικά η  $u(t)$  είναι:

$$u(t) = \beta^2 \cdot |u_g| \cdot \frac{\left[ (1-\beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{(1-\beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2} \cdot \sin \left( \Omega \cdot t + \arctan \frac{-2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1-\beta^2)} \right) \Rightarrow$$

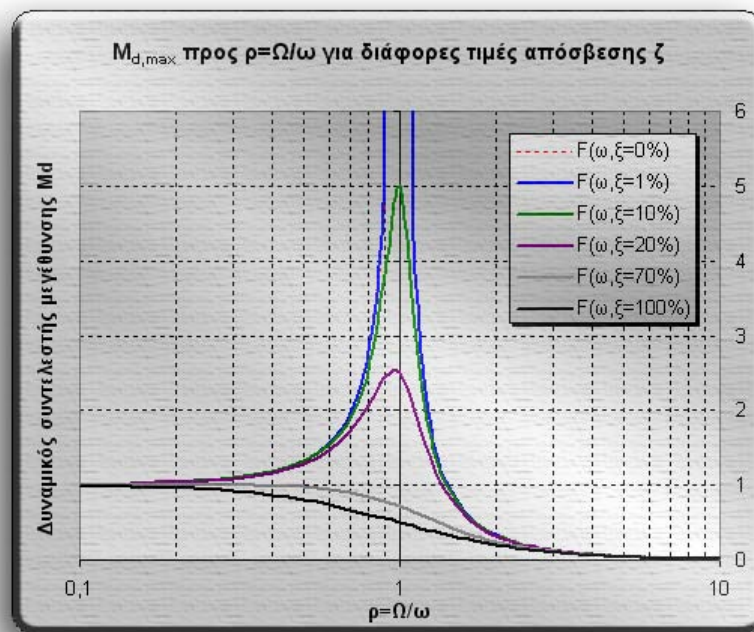
$$u(t) = \frac{\beta^2 \cdot |u_g| \cdot \sin \left( \Omega \cdot t + \arctan \frac{-2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1-\beta^2)} \right)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2}}$$

Το πλάτος της  $u(t)$  είναι:

$$u = \frac{\beta^2 \cdot |u_g|}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{u}{u_g} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2}}} \quad (\text{σχέση 2.2ε})$$

## 2.2) Ερώτημα β.

Με τη βοήθεια του Excel, δημιουργούμε το παρακάτω γράφημα:



Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του  $\rho$ , η απόκριση του συστήματος είναι συναρτήσει της δυσκαμψίας του και ο δυναμικός συντελεστής φόρτισης τείνει στη μονάδα. Το σύστημα, δηλαδή, φορτίζεται στατικά.

Για τιμές του  $\rho$  στην περιοχή της μονάδας, στο σύστημα εμφανίζεται το φαινόμενο του συντονισμού και το  $M_d$  παίρνει τις μέγιστες (ανάλογα με την απόσβεση) τιμές του. Επίσης, για αυξανόμενη απόσβεση, παρατηρούμε μετακίνηση του διαγράμματος προς τα αριστερά.

Για μεγάλες τιμές του  $\rho$ , η απόσβεση κάνει αισθητή την παρουσία της, με αποτέλεσμα ο δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης να τείνει στο 0 (μεγάλη αδράνεια του συστήματος).

### 2.3) Ερώτημα γ.

Η συνάρτηση  $M_d(\rho) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2}}$  μεγιστοποιείται όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής

της, και πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση  $f(\rho) = (1-\rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2$ .

Επειδή η  $f(\rho) \geq 0$ , έχει πιθανότητα να μηδενιστεί (ακρότατο) σε σημείο μηδενισμού της παραγώγου της.

$$f'(\rho) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1-\rho^2) \cdot (-2\rho) + 2 \cdot (2\zeta\rho) \cdot (2\zeta) = 0 \Rightarrow -4 \cdot \rho \cdot (1-\rho^2) + 8 \cdot \zeta^2 \cdot \rho = 0 \Rightarrow$$

$$4 \cdot \rho^3 - 4 \cdot \rho + 8 \cdot \zeta^2 \cdot \rho = 0 \Rightarrow 4 \cdot \rho \cdot (\rho^2 + 2 \cdot \zeta^2 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \rho = \sqrt{1-2 \cdot \zeta^2} \quad \text{ή} \quad \rho = 0 \right\}$$

Για την πρώτη τιμή του  $\rho$ , η αρχική συνάρτηση γίνεται:

$$M_d = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\zeta^2)^2 + (4\zeta^2 \cdot (1-2\zeta^2))}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \zeta^4 + 4\zeta^2 - 8 \cdot \zeta^4}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\zeta^2 - \zeta^4}} = \frac{1}{2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}$$

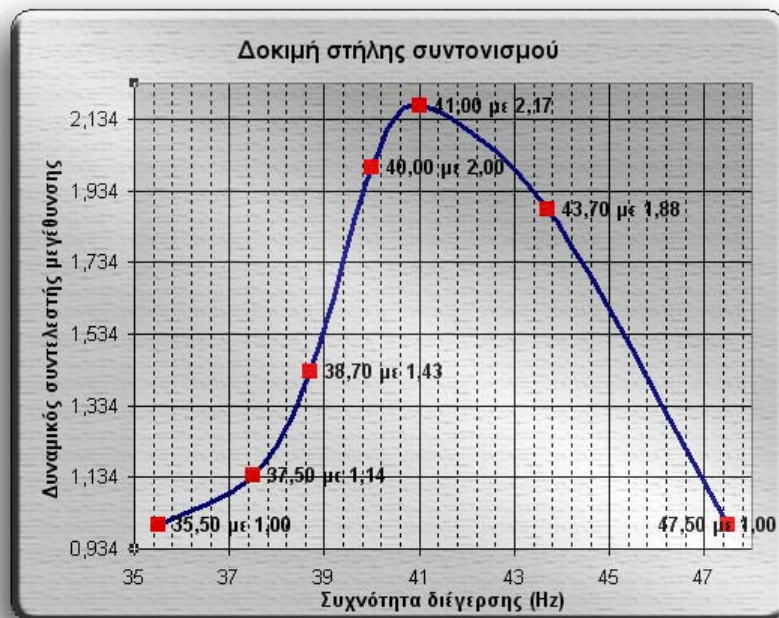
Αν το  $\zeta$  είναι μικρό, τότε το  $\zeta^2$  τείνει στο 0, άρα το  $1-\zeta^2$  τείνει στο 1, οπότε  $M_{d,\max} = \frac{1}{2 \cdot \zeta}$

### 2.4) Ερώτημα δ.

Η εκφώνηση αυτού του ερωτήματος θα χρησιμοποιηθεί στην απάντηση του επόμενου...

### 2.5) Ερώτημα ε.

Τοποθετούμε σε γράφημα τα δεδομένα της εκφώνησης:



Το ακρότατο σημείο του γραφήματος είναι το  $(\Omega_n, M_{d,\max}) = (41,00, 2,17)$ .



Αν  $M_d' = \frac{M_{d,\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2,17}{\sqrt{2}} = 1,534$ , τότε αυτή η τιμή δυναμικού συντελεστή αντιστοιχεί σε δύο τιμές

$\Omega$ , τις  $\Omega_a = 45,3 \text{ Hz}$  και  $\Omega_b = 39,0 \text{ Hz}$ .

Αποδεικνύεται (μέθοδος του «μισού πλάτους») ότι η απόσβεση είναι ίση με:

$$\zeta = \frac{\Omega_a - \Omega_b}{\Omega_n} = \frac{45,3 - 39,0}{41} = 0,154$$

$$\zeta = 15,4\%$$

**[3] Άσκηση 3<sup>η</sup>:**

Το σχήμα 4 δείχνει τη μεταβολή της εκτροπικής τάσης και αξονικής παραμόρφωσης από κυκλική τριαξονική δοκιμή με ελεγχόμενη τάση.

- Να υπολογισθεί το τέμνον μέτρο διάτμησης  $G$  και ο λόγος απόσβεσης  $D$  του δοκιμίου.
- Θεωρώντας ότι η συμπεριφορά του εδάφους περιγράφεται από τα κριτήρια Masing, να εκτιμηθεί το μέγιστο μέτρο διάτμησης του εδάφους.

**3.1) Υπολογισμός του  $G$  και του  $D$  του δοκιμίου.**

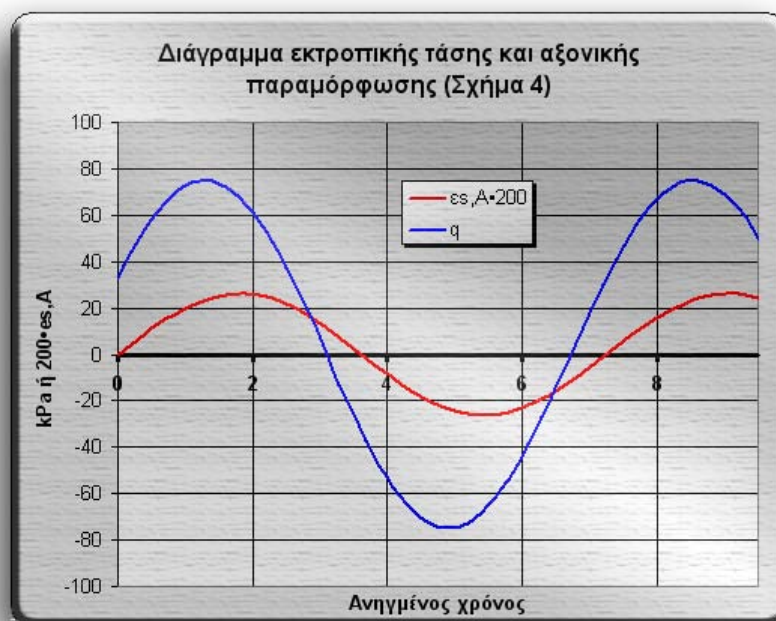
Παρατηρούμε ότι αν στο γράφημα θεωρήσουμε  $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ sec}$ , τότε αν επιπλέον θεωρήσουμε τις τάσεις και παραμορφώσεις ημιτονοειδείς συναρτήσεις, αυτές θα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\text{Αξονική παραμόρφωση: } \varepsilon_{s,A} = 0,1308 \cdot \sin(0,8666 \cdot t)$$

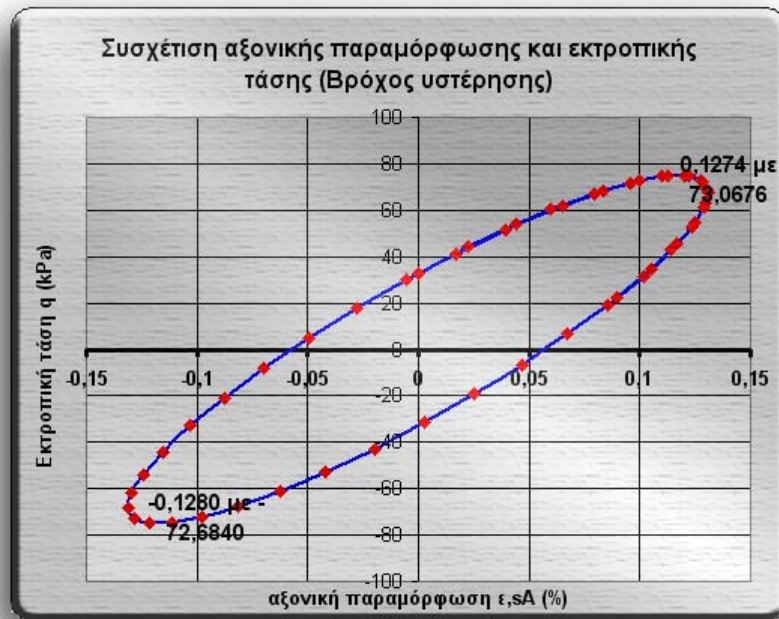
$$\text{Εκτροπική τάση: } q = 75,00 \cdot \sin(0,8666 \cdot t + 0,4550)$$

Σημειώνουμε ότι:

- Το μήκος κύματος της αξονικής παραμόρφωσης  $\varepsilon_{s,A}$  μετρήθηκε (από 0 σε 0) ίσο με 7,25 cm.
- Το μήκος κύματος της εκτροπικής τάσης μετρήθηκε (από κορυφή σε κορυφή) ίσο με 7,25 cm.
- Τα 100 kPa της εκτροπικής τάσης είναι ίσα με 2,6 cm στο διάγραμμα, οπότε τα 1,95 cm που μετρήσαμε ως πλάτος της εκτροπικής τάσης είναι στην ουσία  $1,95 \cdot 100 / 2,6 = 75,00 \text{ kPa}$ .
- Το 0,5% της αξονικής παραμόρφωσης είναι ίσα με 2,6 cm στο διάγραμμα, οπότε τα 0,68 cm που μετρήσαμε ως πλάτος της αξονικής παραμόρφωσης είναι στην ουσία  $0,68 \cdot 0,5 / 2,6 = 0,1308\%$ .
- Ο συντελεστής του  $t$  για την αξονική παραμόρφωση  $\varepsilon_{s,A}$  είναι  $2\pi / 7,25 = 0,8666$ .
- Ο συντελεστής του  $t$  για την εκτροπική τάση  $q$  είναι  $2\pi / 7,25 = 0,8666$ . Σε αυτό το νούμερο προσθέτουμε το έναν αριθμό  $b$  τέτοιον ώστε σε μετρημένη απόσταση  $x=3,1$  να μηδενίζεται:  
 $\sin(ax+b) = y \rightarrow \sin(0,8666 \cdot 3,1 + b) = 0 \rightarrow n \cdot \pi = 0,8666 \cdot 3,1 + b \rightarrow b = n \cdot \pi - 0,8666 \cdot 3,1$   
 και για  $n = 1 \rightarrow b = \pi - 0,8666 \cdot 3,1 \rightarrow b = 0,4550$ .



Δημιουργώντας ζεύγη τιμών εκτροπικής τάσης με αξονική παραμόρφωση, παίρνουμε το κάτωθι διάγραμμα:



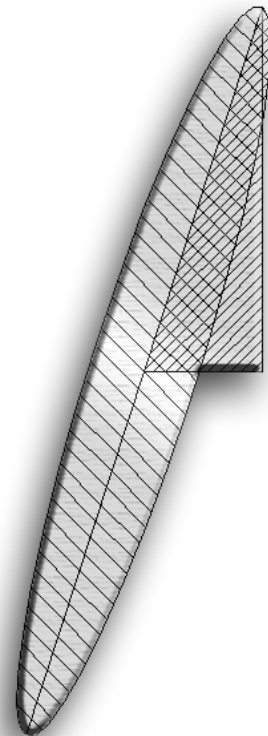
Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας, υπολογίζεται ως η κλίση του άξονα που διέρχεται από τα ακραία σημεία της ανωτέρω καμπύλης:

$$E_{eq} = \frac{\delta q}{\delta \varepsilon_{s,A}} = \frac{73,0676 - (-72,6840)}{0,1274 - (-0,1280)} \cdot \frac{100}{1000} = 57,066 \text{MPa}$$

$$G = \frac{E_{eq}}{2 \cdot (1 + \nu_u)} = \frac{57,066}{2 \cdot (1 + 0,5)} = 19,022 \text{MPa}$$

Με την βοήθεια του AutoCAD (εισαγωγή των σημείων και υπολογισμός των αντίστοιχων εμβαδών), έχουμε τα εξής:

$$D = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{A_{loop}}{A_T} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2694,6115}{911,4499} = 23,526\%$$



### 3.2) Μέγιστο μέτρο διάτμησης, βάσει Masing.

Τα κριτήρια του Masing αναφέρουν ότι οι κλίσεις των κλάδων φόρτισης, αποφόρτισης και επαναφόρτισης είναι ίσες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αγνοούμε τον κλάδο φόρτισης και εφαρμόζουμε τα κριτήρια μόνο για την αποφόρτιση και την επαναφόρτιση. Επομένως έχουμε:

#### Κλάδος αποφόρτισης.

$$E = 73,0676 / (0,1274 - 0,0600) \cdot 100/1000 = 108,409 \text{ MPa}$$

$$\text{οπότε } G = E/2 \cdot (1+\nu) = 108,409 / 3 = 36,136 \text{ MPa}$$

#### Κλάδος επαναφόρτισης.

$$E = 73,0676 / (0,1274 + 0,0600) \cdot 100/1000 = 38,990 \text{ MPa}$$

$$\text{οπότε } G = E/2 \cdot (1+\nu) = 38,990 / 3 = 12,997 \text{ MPa}$$

Τελικά ως μέγιστο μέτρο διάτμησης εκτιμούμε μία τιμή ανάμεσα στις δύο παραπάνω:

$$G_{\max} = 24,567 \text{ MPa.}$$